

Cahier d'analogie: 2- ϵ . Rappels d'algèbre

Yves Lepage

Version 1, septembre 2020

Table des matières

1	Introduction	5
2	Rappels d'algèbre	7
2.1	Structures élémentaires	7
2.1.1	Magmas	7
2.1.2	Semi-groupes	7
2.1.3	Monoïdes	7
2.1.4	Groupes	8
2.2	Propriétés d'un groupe	8
2.2.1	Unicité de l'élément neutre	8
2.2.2	Unicité de l'élément opposé pour tout élément	8
2.2.3	Régularité à gauche	9
2.2.4	Régularité à droite	9
2.2.5	Opposé d'un calcul	9
2.2.6	Egalité d'un élément avec l'opposé de son opposé	9
2.2.7	Egalité des éléments opposés	9
2.3	Autres propriétés	10
2.4	Exemples	10
2.4.1	Valeurs de vérité	10
2.4.2	Chaînes	11
2.4.3	Nombres naturels	11
2.4.4	Parties d'un ensemble	11
2.4.5	Réels et complexes	12
2.4.6	N-uplets	12
2.4.7	Synthèse	13
3	Discussion	15

Chapitre 1

Introduction

Ce cahier donne les notions préliminaires utilisées dans le cahier 2. Il consiste en rappels d'algèbre. Il détaille avec insistance certains résultats, car notre habitude des nombres, \mathbb{N} ou \mathbb{R} , nous les dissimulent souvent.

Chapitre 2

Rappels d'algèbre élémentaire

Nous faisons d'abord quelques rappels d'algèbre élémentaire. Nous rappelons aussi quelques propriétés faciles et les démontrons. Nous insistons sur ses résultats simples afin de convaincre le lecteur que des structures pauvres ne s'adaptent pas forcément facilement aux idées préconçues sur l'analogie.

2.1 Structures élémentaires

2.1.1 Magmas

Un *magma* (\mathcal{E}, \star) est un ensemble \mathcal{E} équipé d'une loi interne \star :

$$\begin{aligned}\star : \mathcal{E} \times \mathcal{E} &\mapsto \mathcal{E} \\ (a, b) &\rightarrow a \star b\end{aligned}$$

2.1.2 Semi-groupes

Un magma (\mathcal{E}, \star) est un *semi-groupe* s'il a la propriété supplémentaire :
— d'*associativité* de la loi interne :

$$\forall (a, b, c) \in \mathcal{E}^3, (a \star b) \star c = a \star (b \star c)$$

2.1.3 Monoïdes

Un semi-groupe (\mathcal{E}, \star) est un *monoïde* s'il a la propriété supplémentaire :
— d'avoir un *élément neutre*, e :

$$\exists e \in \mathcal{E}, \forall a \in \mathcal{E}, a \star e = e \star a = a$$

2.1.4 Groupes

Un semi-groupe (\mathcal{E}, \star) est un *groupe* s'il a la propriété supplémentaire :
 — qu'il existe un *élément opposé* pour tout élément :

$$\forall a \in \mathcal{E}, \exists b \in \mathcal{E}, a \star b = b \star a = e$$

Pour résumer, (\mathcal{E}, \star) est un *groupe* si c'est un ensemble équipé d'une loi interne, \star , qui satisfait les trois propriétés :

— *associativité* de la loi interne :

$$\forall (a, b, c) \in \mathcal{E}^3, (a \star b) \star c = a \star (b \star c)$$

— existence d'un *élément neutre* :

$$\exists e \in \mathcal{E}, \forall a \in \mathcal{E}, a \star e = e \star a = a$$

— existence d'un *élément opposé* pour tout élément :

$$\forall a \in \mathcal{E}, \exists b \in \mathcal{E}, a \star b = b \star a = e$$

2.2 Propriétés d'un groupe

2.2.1 Unicité de l'élément neutre

$$\forall (e, e', a) \in \mathcal{E}^3, \left. \begin{array}{l} a \star e = e \star a = a \\ a \star e' = e' \star a = a \end{array} \right\} \Rightarrow e = e'$$

Démonstration en posant $a = e'$ dans la ligne du haut et $a = e$ dans la ligne du bas. On a alors $e' \star e = e \star e' = e'$ sur la ligne du haut et $e \star e' = e' \star e = e$ sur la ligne du bas. On a donc : $e' \star e = e \star e' = e' = e$.

2.2.2 Unicité de l'élément opposé pour tout élément

$$\forall (a, b, c) \in \mathcal{E}^3, \left. \begin{array}{l} a \star b = b \star a = e \\ a \star c = c \star a = e \end{array} \right\} \Rightarrow b = c$$

Démonstration en faisant $b = b \star e = b \star (a \star c) = (b \star a) \star c = e \star c = c$.

2.2.3 Régularité à gauche

$$\forall (a, b, c) \in \mathcal{E}^3, \quad a \star b = a \star c \quad \Rightarrow \quad b = c$$

Démonstration : en appliquant l'opposé de a à gauche de chacun des membres de l'égalité, on a $a^{-1} \star a \star b = a^{-1} \star a \star c$. Ce qui donne $e \star b = e \star c$ et donc $b = c$

2.2.4 Régularité à droite

$$\forall (a, b, c) \in \mathcal{E}^3, \quad b \star a = c \star a \quad \Rightarrow \quad b = c$$

Démonstration : en appliquant l'opposé de a à droite de chacun des membres de l'égalité, on a $b \star a \star a^{-1} = c \star a \star a^{-1}$. Ce qui donne $b \star e = c \star e$ et donc $b = c$

2.2.5 Opposé d'un calcul

$$(a \star b)^{-1} = b^{-1} \star a^{-1}$$

Démonstration : $b^{-1} \star a^{-1} \star a \star b = b^{-1} \star e \star b = b^{-1} \star b = e$ montre que $b^{-1} \star a^{-1}$ est l'opposé de $a \star b$, qui se note $(a \star b)^{-1}$.

2.2.6 Egalité d'un élément avec l'opposé de son opposé

$$(a^{-1})^{-1} = a$$

Démonstration : par définition de l'élément neutre $(a^{-1})^{-1} \star a^{-1} = a^{-1} \star (a^{-1})^{-1} = e$. C'est-à-dire que $(a^{-1})^{-1}$ est l'opposé de a^{-1} . Mais a est aussi l'opposé de a^{-1} . Par unicité de l'élément opposé, on a donc $(a^{-1})^{-1} = a$.

2.2.7 Egalité des éléments opposés

$$a = b \quad \Rightarrow \quad a^{-1} = b^{-1}$$

Démonstration : $a^{-1} \star a = e = a^{-1} \star b$ et $a \star a^{-1} = e = b \star a^{-1}$ montrent que a^{-1} est l'opposé de b , qui se note b^{-1} .

2.3 Propriétés supplémentaires

Des propriétés supplémentaires peuvent être ajoutées à un monoïde ou à un groupe. Attention, ce ne sont que des propriétés supplémentaires. Elles n'interviennent pas dans la structure de monoïde ou de groupe.

Une propriété supplémentaire classique est la propriété
— de *commutativité* de la loi interne :

$$\forall(a, b) \in \mathcal{E}^2, a \star b = b \star a$$

2.4 Exemples de monoïdes ou de groupes connus

2.4.1 Sur l'ensemble des valeurs de vérité

On note par \mathbb{B} l'ensemble des valeurs de vérité $\{V, F\}$.

(\mathbb{B}, \wedge) est un monoïde, mais pas un groupe. Il y a un élément neutre, V . Il y a associativité de \wedge . Mais il n'y pas d'élément opposé pour F .

(\mathbb{B}, \vee) est un monoïde, mais pas un groupe. Il y a un élément neutre, F . Il y a associativité de \vee . Mais il n'y pas d'élément opposé pour V .

Dans les deux cas ci-dessus, il y a commutativité de la loi interne.

On note le « ou exclusif » par \oplus .

$$p \oplus q = (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) = (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q).$$

(\mathbb{B}, \oplus) est un groupe. L'élément neutre est F . Il y a associativité de \oplus . L'opposé d'une valeur de vérité est elle-même.

Il y a commutativité de \oplus .

On note « si et seulement si » par \Leftrightarrow . C'est l'équivalence logique, ou « non ou exclusif ».

$$p \Leftrightarrow q = (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q) = (p \wedge q) \vee \neg(p \vee q).$$

Il est connu, et c'est la signification de « non ou exclusif », que

$$\neg(p \oplus q) = p \Leftrightarrow q.$$

$(\mathbb{B}, \Leftrightarrow)$ est un groupe. L'élément neutre est V . Il y a associativité de \Leftrightarrow . L'opposé d'une valeur de vérité est elle-même.

Il y a commutativité de \Leftrightarrow .

2.4.2 Sur un ensemble de chaînes

Soit \mathcal{V} un ensemble de symboles. La concaténation, notée $.$ est une loi interne dans \mathcal{V}^* (attention pas dans \mathcal{V}). \mathcal{V}^* est appelé l'ensemble des chaînes sur \mathcal{V} .

$(\mathcal{V}^*, .)$ est un monoïde, mais pas un groupe. L'élément neutre est la chaîne vide, notée ε . Il y a associativité de la concaténation. Mais, il n'y a pas d'élément opposé pour une chaîne.

Il n'y a pas commutativité pour la concaténation.

2.4.3 Sur l'ensemble des nombres naturels

Cet ensemble se note classiquement \mathcal{N} .

$(\mathbb{N}, +)$ est un monoïde, mais pas un groupe. L'élément neutre est 0. Il y a associativité de $+$. Mais, il n'y a pas d'élément opposé pour un nombre naturel dans \mathbb{N} .

$(\mathbb{N} \setminus \{0\}, \times)$ est un monoïde, mais pas un groupe. L'élément neutre est 1. Il y a associativité de \times . Mais, il n'y a pas d'élément opposé pour un nombre naturel dans \mathbb{N} .

Il y a commutativité des lois internes dans les deux cas ci-dessus.

2.4.4 Sur les parties d'un ensemble fini

Soit \mathcal{E} un *ensemble fini*. L'ensemble de ses parties est noté $\mathcal{P}(\mathcal{E})$.

$(\mathcal{P}(\mathcal{E}), \cap)$ est un monoïde mais pas un groupe. L'élément neutre est \mathcal{E} . Il y a associativité de \cap . Mais il n'y a pas d'élément opposé pour aucun A dans \mathcal{E} .

$(\mathcal{P}(\mathcal{E}), \cup)$ est un monoïde mais pas un groupe. L'élément neutre est \emptyset . Il y a associativité de \cup . Mais il n'y a pas d'élément opposé pour aucun A dans \mathcal{E} .

Il y a commutativité des lois internes dans les deux cas ci-dessus.

On note la différence symétrique entre ensembles par Δ .

$$A \Delta B = A \setminus B \cup B \setminus A.$$

$(\mathcal{P}(\mathcal{E}), \Delta)$ est un groupe. L'élément neutre est \emptyset . Il y a associativité de Δ . L'élément opposé de A est A lui-même pour tout A de l'ensemble \mathcal{E} .

Il y a commutativité de Δ .

Notons par $\dot{=}$ la loi interne suivante sur les ensembles, qui n'a pas de nom.

$$A \dot{=} B = A \cap B \cup ((\mathcal{E} \setminus B) \cap (\mathcal{E} \setminus A)).$$

C'est le complémentaire de la différence symétrique.

$$A \dot{=} B = \mathcal{E} \setminus (A \Delta B).$$

$(\mathcal{P}(\mathcal{E}), \dot{=})$ est un groupe. L'élément neutre est \mathcal{E} . Il y a associativité de $\dot{=}$. L'élément opposé de A est A lui-même pour tout A de l'ensemble \mathcal{E} .

Il y a commutativité de $\dot{=}$.

2.4.5 Sur l'ensemble des nombres réels ou complexes

\mathbb{R} est l'ensemble des nombre réels et \mathbb{C} celui des nombres complexes.

$(\mathbb{R}, +)$ est un groupe. L'élément neutre est 0. L'opposé de a est $-a$.

$(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \times)$ est un groupe. L'élément neutre est 1. L'opposé de a est $\frac{1}{a}$, qui s'appelle l'inverse de a .

Il y a commutativité des lois internes dans les deux cas ci-dessus.

$(\mathbb{C}, +)$ est un groupe. L'élément neutre est 0. L'opposé de $a = x + iy$ est $-a = -x - iy$.

$(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \times)$ est un groupe. L'élément neutre est 1. L'opposé de $a = x + iy$ est $\frac{1}{a} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$; il s'appelle l'inverse de a .

Il y a commutativité des lois internes dans les deux cas ci-dessus.

2.4.6 Sur l'ensemble des n-uplets construits sur un ensemble

Pour un entier naturel n et un ensemble \mathcal{E} , cet ensemble, noté (\mathcal{E}^n) , est l'ensemble des éléments de la forme (a_1, \dots, a_n) où chaque a_i , $1 \leq i \leq n$, est un élément de \mathcal{E} .

Pour tout groupe (\mathcal{E}, \star) , (\mathcal{E}^n, \star) est un groupe, le groupe des n-uplets sur \mathcal{E} pour \star . L'élément neutre est le n-uplet constitué de l'élément neutre sur chaque indice. L'opposé d'un n-uplet $a = (a_i)_{1 \leq i \leq n}$ est le n-uplet $(a_i^{-1})_{1 \leq i \leq n}$.

S'il y a commutativité pour (\mathcal{E}, \star) , il y a alors aussi commutativité pour (\mathcal{E}^n, \star) .

2.4.7 Synthèse des exemples précédents

Les deux tableaux suivants résument tous les faits précédents. Le premier tableau résume les faits sur les ensembles de nombres. Le second tableau donne les faits sur l'ensemble des valeurs de vérité, et sur des ensembles généraux, mais finis, ou un ensemble quelconque de symboles.

ensemble	loi interne	élément neutre	associativité	monoïde	élt opposé de a	groupe	commutativité
$(\mathbb{N}, +)$		0	oui	oui			oui
$(\mathbb{N} \setminus \{0\}, \times)$		1	oui	oui			oui
$(\mathbb{Z}, +)$		0	oui	oui	$-a$	oui	oui
$(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \times)$		1	oui	oui	$\frac{1}{a}$	oui	oui
$(\mathbb{R}, +)$		0	oui	oui	$-a$	oui	oui
$(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \times)$		1	oui	oui	$\frac{1}{a}$	oui	oui
$(\mathbb{C}, +)$		0	oui	oui	$-a$	oui	oui
$(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \times)$		1	oui	oui	$\frac{1}{a}$	oui	oui

ensemble	loi interne	élément neutre	associativité	monoïde	élt opposé de a	groupe	commutativité
(\mathbb{B}, \wedge)		V	oui	oui			oui
(\mathbb{B}, \vee)		F	oui	oui			oui
(\mathbb{B}, \oplus)		F	oui	oui	a	oui	oui
$(\mathbb{B}, \Leftrightarrow)$		V	oui	oui	a	oui	oui
$(\mathcal{P}(\mathcal{E}), \cap)$		\mathcal{E}	oui	oui			oui
$(\mathcal{P}(\mathcal{E}), \cup)$		\emptyset	oui	oui			oui
$(\mathcal{P}(\mathcal{E}), \Delta)$		\emptyset	oui	oui	a	oui	oui
$(\mathcal{P}(\mathcal{E}), \dot{=})$		\mathcal{E}	oui	oui	a	oui	oui
(\mathcal{V}^*, \cdot)		ε	oui	oui			

Chapitre 3

Discussion

Ce cahier préliminaire ne parlait pas d'analogie. Les résultats qui y ont été donnés seront utiles à l'établissement des résultats donnés dans le cahier 2, qui lui, s'intéressera à la notion d'analogie.

Bibliographie