Cahier d'analogie: 2−ϵ. Rappels d'algèbre

Yves Lepage

Version 1, septembre 2020

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

Ce cahier donne les notions préliminaires utilisées dans le cahier 2. Il consiste en rappels d'algèbre. Il détaille avec insistance certains résultats, car notre habitude des nombres, de $\mathbb{N}$ ou de $\mathbb{R}$, nous les dissimulent souvent.

Chapitre 2

Rappels d'algèbre élémentaire

2.1 Structures élémentaires

2.1.1 Magmas

Un *magma* $(\mathcal{E}, \star)$ est un ensemble $\mathcal{E}$ équipé d'une loi interne $\star$:

$$\begin{array}{rrcl} \star : & \mathcal{E} \times \mathcal{E} & \mapsto & \mathcal{E} \\ & (a, b) & \to & a \star b \end{array}$$

2.1.2 Semi-groupes

Un magma $(\mathcal{E}, \star)$ est un *semi-groupe* s'il a la propriété supplémentaire :
— d'*associativité* de la loi interne :

$$\forall (a, b, c) \in \mathcal{E}^3,\ (a \star b) \star c = a \star (b \star c)$$

2.1.3 Monoïdes

Un semi-groupe $(\mathcal{E}, \star)$ est un *monoïde* s'il a la propriété supplémentaire :
— d'avoir un *élément neutre*, e :

$$\exists e \in \mathcal{E},\ \forall a \in \mathcal{E},\ a \star e = e \star a = a$$

2.1.4 Groupes

Un semi-groupe $(\mathcal{E}, \star)$ est un *groupe* s'il a la propriété supplémentaire :
— qu'il existe un *élément opposé* pour tout élément :

$$\forall a \in \mathcal{E},\ \exists b \in \mathcal{E},\ a \star b = b \star a = e$$

Autrement dit, $(\mathcal{E}, \star)$ est un *groupe* si c'est un ensemble équipé d'une loi interne, $\star$, qui satisfait les trois propriétés :

— *associativité* de la loi interne :

$$\forall (a,b,c) \in \mathcal{E}^3,\ (a \star b) \star c = a \star (b \star c)$$

— existence d'un *élément neutre* :

$$\exists e \in \mathcal{E},\ \forall a \in \mathcal{E},\ a \star e = e \star a = a$$

— existence d'un *élément opposé* pour tout élément :

$$\forall a \in \mathcal{E},\ \exists b \in \mathcal{E},\ a \star b = b \star a = e$$

2.2 Propriétés d'un groupe

2.2.1 Unicité de l'élément neutre

$$\forall (e,e',a) \in \mathcal{E}^3, \quad \left.\begin{array}{r} a \star e = e \star a = a \\ a \star e' = e' \star a = a \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad e = e'$$

Démonstration en posant $a = e'$ dans la ligne du haut et $a = e$ dans la ligne du bas. On a alors $e' \star e = e \star e' = e'$ sur la ligne du haut et $e \star e' = e' \star e = e$ sur la ligne du bas. On a donc : $e' \star e = e \star e' = e' = e$.

2.2.2 Unicité de l'élément opposé pour tout élément

$$\forall (a,b,c) \in \mathcal{E}^3, \quad \left.\begin{array}{r} a \star b = b \star a = e \\ a \star c = c \star a = e \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad b = c$$

Démonstration en faisant $b = b \star e = b \star (a \star c) = (b \star a) \star c = e \star c = c$.

2.2.3 Régularité à gauche

$$\forall (a,b,c) \in \mathcal{E}^3, \quad a \star b = a \star c \quad \Rightarrow \quad b = c$$

Démonstration : en appliquant l'opposé de a à gauche de chacun des membres de l'égalité, on a $a^{-1} \star a \star b = a^{-1} \star a \star c$. Ce qui donne $e \star b = e \star c$ et donc $b = c$

2.2.4 Régularité à droite

$$\forall (a, b, c) \in \mathcal{E}^3, \quad b \star a = c \star a \quad \Rightarrow \quad b = c$$

Démonstration : en appliquant l'opposé de a à droite de chacun des membres de l'égalité, on a $b \star a \star a^{-1} = c \star a \star a^{-1}$. Ce qui donne $b \star e = c \star e$ et donc $b = c$

2.2.5 Opposé d'un calcul

$$(a \star b)^{-1} = b^{-1} \star a^{-1}$$

Démonstration : $b^{-1} \star a^{-1} \star a \star b = b^{-1} \star e \star b = b^{-1} \star b = e$ montre que $b^{-1} \star a^{-1}$ est l'opposé de $a \star b$, qui se note $(a \star b)^{-1}$.

2.2.6 Egalité d'un élément avec l'opposé de son opposé

$$(a^{-1})^{-1} = a$$

Démonstration : par définition de l'élément neutre $(a^{-1})^{-1} \star a^{-1} = a^{-1} \star (a^{-1})^{-1} = e$. C'est-à-dire que $(a^{-1})^{-1}$ est l'opposé de a^{-1}. Mais a est aussi l'opposé de a^{-1}. Par unicité de l'élément opposé, on a donc $(a^{-1})^{-1} = a$.

2.2.7 Egalité des éléments opposés

$$a = b \quad \Rightarrow \quad a^{-1} = b^{-1}$$

Démonstration : $a^{-1} \star a = e = a^{-1} \star b$ et $a \star a^{-1} = e = b \star a^{-1}$ montrent que a^{-1} est l'opposé de b, qui se note b^{-1}.

Par égalité d'un élément avec l'opposé de son opposé, l'implication est en fait une équivalence : $a = b \Leftrightarrow a^{-1} = b^{-1}$.

2.3 Propriétés supplémentaires

Des propriétés supplémentaires peuvent être ajoutées à un monoïde ou à un groupe. Attention, ce ne sont que des propriétés supplémentaires. Elles n'interviennent pas dans la structure de monoïde ou de groupe.

Une propriété supplémentaire classique est la propriété

— de *commutativité* de la loi interne :

$$\forall (a, b) \in \mathcal{E}^2, \; a \star b = b \star a$$

2.4 Exemples de monoïdes ou de groupes connus

2.4.1 Sur l'ensemble des valeurs de vérité

On note par $\mathbb{B}$ l'ensemble des valeurs de vérité $\{V, F\}$.

$(\mathbb{B}, \wedge)$ est un monoïde, mais pas un groupe. Il y a un élément neutre, V. Il y a associativité de $\wedge$. Mais il n'y pas d'élément opposé pour F.

$(\mathbb{B}, \vee)$ est un monoïde, mais pas un groupe. Il y a un élément neutre, F. Il y a associativité de $\vee$. Mais il n'y pas d'élément opposé pour V.

Dans les deux cas ci-dessus, il y a commutativité de la loi interne.

On note le « ou exclusif » par $\oplus$.

$$p \ \oplus \ q = (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) = (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q).$$

$(\mathbb{B}, \oplus)$ est un groupe. L'élément neutre est F. Il y a associativité de $\oplus$. L'opposé d'une valeur de vérité est elle-même.

Il y a commutativité de $\oplus$.

On note « si et seulement si » par $\Leftrightarrow$. C'est l'équivalence logique, ou « non ou exclusif ».

$$p \Leftrightarrow q = (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q) = (p \wedge q) \vee \neg(p \vee q).$$

Il est connu, et c'est la signification de « non ou exclusif », que

$$\neg(p \oplus q) = p \Leftrightarrow q.$$

$(\mathbb{B}, \Leftrightarrow)$ est un groupe. L'élément neutre est V. Il y a associativité de $\Leftrightarrow$. L'opposé d'une valeur de vérité est elle-même.

Il y a commutativité de $\Leftrightarrow$.

2.4.2 Sur un ensemble de chaînes

Soit $\mathcal{V}$ un ensemble de symboles. La concaténation, notée . est une loi interne dans $\mathcal{V}^*$ (attention pas dans $\mathcal{V}$). $\mathcal{V}^*$ est appelé l'ensemble des chaînes sur $\mathcal{V}$.

$(\mathcal{V}^*, .)$ est un monoïde, mais pas un groupe. L'élément neutre est la chaîne vide, notée ε. Il y a associativité de la concaténation. Mais, il n'y a pas d'élément opposé pour une chaîne.

Il n'y a pas commutativité pour la concaténation.

2.4.3 Sur l'ensemble des nombres naturels

Cet ensemble se note classiquement $\mathcal{N}$.

$(\mathbb{N}, +)$ est un monoïde, mais pas un groupe. L'élément neutre est 0. Il y a associativité de $+$. Mais, il n'y a pas d'élément opposé pour un nombre naturel dans $\mathbb{N}$.

$(\mathbb{N} \setminus \{0\}, \times)$ est un monoïde, mais pas un groupe. L'élément neutre est 1. Il y a associativité de $\times$. Mais, il n'y a pas d'élément opposé pour un nombre naturel dans $\mathbb{N}$.

Il y a commutativité des lois internes dans les deux cas ci-dessus.

2.4.4 Sur les parties d'un ensemble fini

Soit $\mathcal{E}$ un *ensemble fini*. L'ensemble de ses parties est noté $\mathcal{P}(\mathcal{E})$.

$(\mathcal{P}(\mathcal{E}), \cap)$ est un monoïde mais pas un groupe. L'élément neutre est $\mathcal{E}$. Il y a associativité de $\cap$. Mais il n'y a pas d'élément opposé pour aucun A dans $\mathcal{E}$.

$(\mathcal{P}(\mathcal{E}), \cup)$ est un monoïde mais pas un groupe. L'élément neutre est $\emptyset$. Il y a associativité de $\cup$. Mais il n'y a pas d'élément opposé pour aucun A dans $\mathcal{E}$.

Il y a commutativité des lois internes dans les deux cas ci-dessus.

On note la différence symétrique entre ensembles par $\triangle$.

$$A \triangle B = A \setminus B \;\cup\; B \setminus A.$$

$(\mathcal{P}(\mathcal{E}), \triangle)$ est un groupe. L'élément neutre est $\emptyset$. Il y a associativité de $\triangle$. L'élément opposé de A est A lui-même pour tout A de l'ensemble $\mathcal{E}$.

Il y a commutativité de $\triangle$.

Notons par $\doteq$ la loi interne suivante sur les ensembles, qui n'a pas de nom.

$$A \doteq B = A \cap B \;\cup\; ((\mathcal{E} \setminus B) \cap (\mathcal{E} \setminus A)).$$

C'est le complémentaire de la différence symétrique.

$$A \doteq B = \mathcal{E} \setminus (A \triangle B).$$

$(\mathcal{P}(\mathcal{E}), \doteq)$ est un groupe. L'élément neutre est $\mathcal{E}$. Il y a associativité de $\doteq$. L'élément opposé de A est A lui-même pour tout A de l'ensemble $\mathcal{E}$.

Il y a commutativité de $\doteq$.

2.4.5 Sur l'ensemble des nombres réels ou complexes

$\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombre réels et $\mathbb{C}$ celui des nombres complexes.

$(\mathbb{R}, +)$ est un groupe. L'élément neutre est 0. L'opposé de a est $-a$.

$(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \times)$ est un groupe. L'élément neutre est 1. L'opposé de a est $\frac{1}{a}$, qui s'appelle l'inverse de a.

Il y a commutativité des lois internes dans les deux cas ci-dessus.

$(\mathbb{C}, +)$ est un groupe. L'élément neutre est 0. L'opposé de $a = x + iy$ est $-a = -x - iy$.

$(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \times)$ est un groupe. L'élément neutre est 1. L'opposé de $a = x + iy$ est $\frac{1}{a} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$; il s'appelle l'inverse de a.

Il y a commutativité des lois internes dans les deux cas ci-dessus.

2.4.6 Produit cartésien d'ensembles munis de l'analogie

Soit n un entier. Soit $\mathcal{E}$ le produit cartésien de n ensembles $\mathcal{E}_i$ tous munis de l'analogie. Par définition, pour chaque élément X de $\mathcal{E}$, on pose : $X = (X_1, \ldots, X_n)$. On munit $\mathcal{E}$ de l'analogie en y définissant l'analogie par la conjonction des analogies sur chaque composante.

$$\forall (A, B, C, D) \in \mathcal{E}, \quad A : B :: C : D \overset{\text{déf}}{\Leftrightarrow} \forall i \in \{1, \ldots, n\}, \quad A_i : B_i :: C_i : D_i$$

En particulier, pour un entier naturel n et un ensemble $\mathcal{E}$, l'ensemble des n-uplets sur $\mathcal{E}$, noté $\mathcal{E}^n$, est l'ensemble des éléments de la forme $(a_1, \ldots, a_n)$ où chaque a_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$, est un élément de $\mathcal{E}$.

Pour tout groupe $(\mathcal{E}, \star)$, $(\mathcal{E}^n, \star)$ est un groupe, le groupe des n-uplets sur $\mathcal{E}$ pour $\star$. L'élément neutre est le n-uplet constitué de l'élément neutre sur chaque indice. L'opposé d'un n-uplet $a = (a_i)_{i \in \{1,\ldots,n\}}$ est le n-uplet $({a_i}^{-1})_{i \in \{1,\ldots,n\}}$.

S'il y a commutativité pour $(\mathcal{E}, \star)$, il y a alors aussi commutativité pour $(\mathcal{E}^n, \star)$.

2.4.7 Synthèse des exemples précédents

Les deux tableaux suivants résument tous les faits précédents. Le premier tableau résume les faits sur les ensembles de nombres. Le second tableau donne les faits sur l'ensemble des valeurs de vérité, et sur des ensembles généraux, mais finis, ou un ensemble quelconque de symboles.

ensemble	**loi interne**	élément neutre	associativité	**monoïde**	élt opposé de a	**groupe**	commutativité
$(\mathbb{N},$	$+)$	0	oui	oui			oui
$(\mathbb{N}\setminus\{0\},$	$\times)$	1	oui	oui			oui
$(\mathbb{Z},$	$+)$	0	oui	oui	$-a$	oui	oui
$(\mathbb{Q}\setminus\{0\},$	$\times)$	1	oui	oui	$\frac{1}{a}$	oui	oui
$(\mathbb{R},$	$+)$	0	oui	oui	$-a$	oui	oui
$(\mathbb{R}\setminus\{0\},$	$\times)$	1	oui	oui	$\frac{1}{a}$	oui	oui
$(\mathbb{C},$	$+)$	0	oui	oui	$-a$	oui	oui
$(\mathbb{C}\setminus\{0\},$	$\times)$	1	oui	oui	$\frac{1}{a}$	oui	oui

ensemble	**loi interne**	élément neutre	associativité	**monoïde**	élt opposé de a	**groupe**	commutativité
$(\mathbb{B},$	$\wedge)$	V	oui	oui			oui
$(\mathbb{B},$	$\vee)$	F	oui	oui			oui
$(\mathbb{B},$	$\oplus)$	F	oui	oui	a	oui	oui
$(\mathbb{B},$	$\Leftrightarrow)$	V	oui	oui	a	oui	oui
$(\mathcal{P}(\mathcal{E}),$	$\cap)$	$\mathcal{E}$	oui	oui			oui
$(\mathcal{P}(\mathcal{E}),$	$\cup)$	$\emptyset$	oui	oui			oui
$(\mathcal{P}(\mathcal{E}),$	$\triangle)$	$\emptyset$	oui	oui	a	oui	oui
$(\mathcal{P}(\mathcal{E}),$	$\doteq)$	$\mathcal{E}$	oui	oui	a	oui	oui
$(\mathcal{V}^*,$	$.)$	ε	oui	oui			

Chapitre 3

Discussion

Ce cahier préliminaire ne parlait pas d'analogie. Les résultats qui y ont été donnés seront utiles à l'établissement des résultats donnés dans le cahier 2, qui lui, traitera de l'analogie.

Nous avons rappelé quelques propriétés faciles et les avons démontrées. Nous avons insisté sur ses résultats simples afin de convaincre le lecteur, dans le cahier 2, que des structures pauvres ne s'adaptent pas forcément facilement aux idées préconçues sur l'analogie.