Cahier d'analogie:
6 et 1/2. Propriétés des analogies en puissance p

Yves Lepage

Version 1, 2024

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

Ces notes donnent quelques propriétés intéressantes des analogie et moyennes en puissance p qui sont, rappelons-le, fondés sur les moyennes généralisées.

Il est d'abord question de dériver des analogies à partir d'une analogie donnée en prenant des termes plus petis ou plus grands que les termes d'origine, donc par rétrécissement ou agrandissement. Ces résultats se voient bien si l'on éclate les termes sur deux dimensions. Mais il faut faire attention que cette visualisation est fallacieuse.

En particulier, on y établit des bornes pour la puissance analogique. Ces bornes peuvent être adoptées dans le calcul dichotomique de la puissance analogique.

On montre aussi qu'il est facile d'étendre l'analogie avec termes positifs et non nuls au cas ou l'un des termes, voire plus, est égal à zéro.

Chapitre 2

Rétrécissements et agrandissements

2.1 Egalité des moyennes de tous les termes, des moyennes des extrêmes et des moyennes des moyens

Il est facile de montrer que, pour une analogie donnée, les trois moyennes suivantes :
— la moyenne de tous les termes,
— la moyenne des extrêmes et
— la moyenne des moyens
sont égales.

$\forall (a, b, c, d) \in (\mathbb{R}^+ \setminus \{0\})^4$,

$$a : b ::^p c : d \;\Rightarrow\; m_p(a, b, c, d) = m_p(a, d) = m_p(b, c)$$

La démonstration se fait à partir des trois propriétés suivantes.

La première propriété est que, s'il y a analogie alors, $m_p(a, d) = m_p(b, c)$.

La deuxième propriété est une propriété générale des moyennes qui énonce que l'on peut décomposer une moyenne comme moyenne de moyennes de paquets d'éléments de même taille. Autrement dit :

$$\begin{aligned} m(x_1, x_2, \ldots, x_{m\times n}) = m\big(&m(x_1, \ldots, x_n),\\ &m(x_{n+1}, \ldots, x_{2n}),\\ &\quad\vdots\\ &m(x_{(m-1)\times n+1}, \ldots, x_{m\times n})\big) \end{aligned}$$

La troisième propriété est aussi une propriété des moyennes. Elle énonce que toute moyenne est égale à la moyenne de cette moyenne répétée autant de fois que l'on veut.

$$m(x_1,\ldots,x_n) = m\left(m(x_1,\ldots,x_n),\ldots,m(x_1,\ldots,x_n)\right)$$

On peut appliquer cette propriété générale aux quatre termes de l'analogie en décomposant en paquets de deux judicieusement choisis : le paquet des deux moyens et le paquet des deux extrêmes.

$$\begin{aligned} m_p(a,b,c,d) &= m_p(m_p(a,d), m_p(b,c)) \\ &= m_p(m_p(a,d), m_p(a,d)) \\ &= m_p(a,d) \end{aligned}$$

De même pour $m_p(b,c)$.

2.2 Rétrécissement d'analogie aux moyennes des termes des rapports

2.2.1 Rétrécissement vertical

Étant donnée une analogie en puissance p, p différent de plus ou moins l'infini, on peut former une nouvelle analogie de même puissance dont les deux conséquents (termes b et d) sont les moyennes des termes du premier et du deuxième rapport. La raison pour laquelle nous appelons ce résultat un rétrécissement vertical provient de la visualisation donnée plus bas dans la figure 2.1.

$\forall (a, b, c, d) \in (\mathbb{R}^+ \setminus \{0\})^4$,

$$a : b ::^p c : d \;\Rightarrow\; a : m_p(a, b) ::^p c : m_p(c, d)$$

Démonstration pour le cas $p \neq 0$:

$$\begin{aligned} m_p(a, m_p(c, d)) &= \left(\frac{1}{2}(a^p + \left(\frac{1}{2}(c^p + d^p)\right)^{1/p \times p})\right)^{1/p} \\ &= \left(\frac{1}{2}(a^p + \frac{1}{2}c^p + \frac{1}{2}d^p)\right)^{1/p} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_p(m_p(a, b), c) &= \left(\frac{1}{2}(\frac{1}{2}a^p + \frac{1}{2}b^p + c^p)\right)^{1/p} \\ &= \left(\frac{1}{2}(a^p - \frac{1}{2}a^p + \frac{1}{2}b^p + \frac{1}{2}c^p + \frac{1}{2}c^p)\right)^{1/p} \\ &= \left(\frac{1}{2}(a^p - \frac{1}{2}a^p + \frac{1}{2}a^p + \frac{1}{2}d^p + \frac{1}{2}c^p)\right)^{1/p} \\ &= \left(\frac{1}{2}(a^p + \frac{1}{2}c^p + \frac{1}{2}d^p)\right)^{1/p} \end{aligned}$$

On a pu remplacer $\frac{1}{2}b^p + \frac{1}{2}c^p$ par $\frac{1}{2}a^p + \frac{1}{2}d^p$ ci-dessus car on a supposé l'analogie $a : b ::^p c : d$.

On constate donc que

$$m_p(a, m_p(c, d)) = m_p(m_p(a, b), c),$$

c'est-à-dire

$$a : m_p(a, b) ::^p c : m_p(c, d).$$

Démonstration pour le cas $p = 0$:

$$
\begin{aligned}
m_0(a, m_0(c,d))^2 &= a \times \sqrt{cd} \\
&= \sqrt{a}\sqrt{a}\sqrt{c}\sqrt{d} \\
&= \sqrt{a}\sqrt{c}\sqrt{a}\sqrt{d} \\
&= \sqrt{a}\sqrt{c}\sqrt{b}\sqrt{c} \\
&= \sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c}\sqrt{c} \\
&= \sqrt{ab} \times c \\
&= m_p(m_p(a,b),c)^2
\end{aligned}
$$

car, l'analogie entre a, b, c et d étant supposée, on a l'égalité $\sqrt{ad} = \sqrt{bc}$.

2.2.2 Généralisation : rétrécissements vertical et horizontal

Les huit formes équivalentes de l'analogie permettent de généraliser le résultat précédent. Il suffit de l'appliquer aux huit formes équivalentes de l'analogie. On rétablit ensuite l'ordre de l'analogie selon ses désirs.

$\forall (a,b,c,d) \in (\mathbb{R}^+ \setminus \{0\})^4$,

$$
a : b ::^p c : d \Rightarrow \begin{cases}
a : b ::^p c : d \\
a : c ::^p b : d \\
b : a ::^p d : c \\
b : d ::^p a : c \\
c : a ::^p d : b \\
c : d ::^p a : b \\
d : b ::^p c : a \\
d : c ::^p b : a
\end{cases}
\Rightarrow \begin{cases}
a : m_p(a,b) ::^p c : m_p(c,d) \\
a : m_p(a,c) ::^p b : m_p(b,d) \\
b : m_p(a,b) ::^p d : m_p(c,d) \\
b : m_p(b,d) ::^p a : m_p(a,c) \\
c : m_p(a,c) ::^p d : m_p(b,d) \\
c : m_p(c,d) ::^p a : m_p(a,d) \\
d : m_p(b,d) ::^p c : m_p(a,c) \\
d : m_p(c,d) ::^p b : m_p(a,b)
\end{cases}
$$

On constate que l'on a au total seulement quatre formes. Les formes $a : m_p(a,b) ::^p c : m_p(c,d)$ et $m_p(a,b) : b ::^p m_p(c,d) : d$ peuvent être considérées comme des rétrécissements verticaux, et les formes $a : m_p(a,c) ::^p b : m_p(b,d)$ et $m_p(a,c) : c ::^p m_p(b,d) : d$ comme des rétrécissements horizontaux de l'analogie initiale. Cette dénomination provient de la visualisation trompeuse suivante (figure 2.1). Nous disons trompeuse car nous éclatons sur deux dimensions ce qui n'existe que sur une seule. Mais cette vue est conforme à la représentation intuitive de l'analogie comme carré ou rectangle.

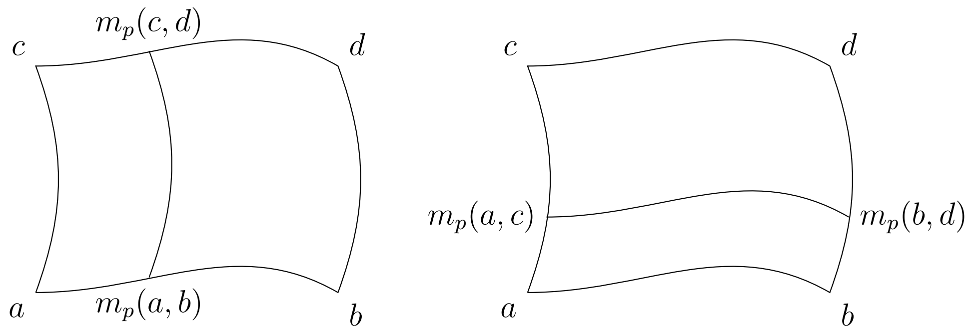

FIGURE 2.1 – À gauche, visualisation du rétrécissement horizontal, et, à droite, du rétrécissement vertical.

2.2.3 Rétrécissement au demi-carré

Le résultat suivant généralise en quelque sorte le résultat précédent en l'appliquant deux fois : une fois verticalement et une autre fois horizontalement. Il énonce le fait que l'on peut rétrécir un carré analogique en un carré homologue selon les moyennes de même puissance.

$\forall (a,b,c,d) \in (\mathbb{R}^+ \setminus \{0\})^4$,

$$a : b ::^p c : d \;\Rightarrow\; a : m_p(a,b) ::^p m_p(a,c) : m_p(a,b,c,d)$$

Démonstration pour $p \neq 0$: On développe chacune des moyennes, celle des extrêmes et celle des moyens. On calculera ces moyennes élevées à la puissance p et on éliminera aussi le facteur 1/2.

$$\begin{aligned} 2 \times m_p(a, m_p(a,b,c,d))^p &= \left(a^p + \left(\frac{1}{4}(a^p + b^p + c^p + d^p)\right)^{1/p \times p}\right) \\ &= a^p + \frac{1}{2}b^p + \frac{1}{2}c^p \end{aligned}$$

Supposer une analogie de puissance p entre a, b, c et d permet d'utiliser l'égalité $a^p + d^p = b^p + c^p$ ci-dessus.

$$\begin{aligned}2 \times m_p(m_p(a,b), m_p(a,c))^p &= \left(\frac{1}{2}(a^p + c^p)\right)^{1/p \times p} + \left(\frac{1}{2}(a^p + b^p)\right)^{1/p \times p} \\ &= a^p + \frac{1}{2}b^p + \frac{1}{2}c^p\end{aligned}$$

Constater l'égalité des deux termes conclut la démonstration pour $p \neq 0$.

Démonstration pour $p = 0$:

$$\begin{aligned}m_0(a, m_0(a,b,c,d)) &= \sqrt{a\sqrt[4]{abcd}} \\ &= \sqrt{a\sqrt[4]{(bc)^2}} \\ &= \sqrt{a\sqrt{bc}} \\ &= \sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{ac}} \\ &= m_0(m_0(a,b), m_0(a,c))\end{aligned}$$

car, l'analogie de puissance 0 entre a, b, c et d étant supposée, on a l'égalité $\sqrt{ad} = \sqrt{bc}$, soit $ad = bc$.

Visualisation : La visualisation du rétrécissement au demi-carré est donnée par la figure 2.2.

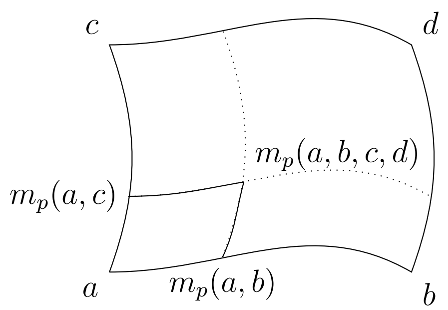

FIGURE 2.2 – Rétrécissement au demi-carré

2.2.4 Itération

On peut envisager à partir d'une analogie donnée, d'itérer le rétrécissement vertical en passant aux moyennes, puis aux moyennes des moyennes, etc. pour produire une série d'analogies de même puissance.

En appliquant la même opération de moyennage itérativement, les termes moyennes convergent vers les termes non moyennés originaux et donc vers une analogie dégénérée du type $a : a :: c : c$ ou $a : b :: a : b$.

Posons :

$$\begin{aligned} M(a,b) = M^1(a,b) &= m_p(a,b) \\ M^2(a,b) &= m_p(a, m_p(a,b)) = m_p(a, M^1(a,b)) \\ &\vdots \\ M^{n+1}(a,b) &= m_p(a, M^n(a,b)) \end{aligned}$$

On a $\lim_{n\to+\infty} M^n(a,b) = a$.

On a alors en passant à la limite pour l'analogie :

$$\lim_{n\to+\infty} a : M^n(a,b) ::^p c : M^n(c,d) \;=\; a : a :: c : c.$$

De façon similaire, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} a : b ::^p M^n(a,c) : M^n(b,d) \;=\; a : b :: a : b.$$

De façon encore similaire, on aura :

$$\lim_{n\to+\infty} a : M^n(a,b) ::^p M^n(a,c) : M^n(a,b,c,d) = a : a :: a : a$$

en posant les définitions nécessaires pour $M^n(a,b,c,d)$.

2.3 Agrandissements

Réciproquement au rétrécissement, on peut établir des propriétés d'agrandissement d'une analogie en puissance p selon les trois directions vues précédemment : verticale, horizontale ou selon les deux à la fois pour le demi-carré. Pour l'agrandissement cela sera un double du carré.

Cela provient du fait que l'on peut résoudre une équation en moyenne : étant donné a et un nombre m donné, il est possible de trouver b tel que $m_p(a,b) = m$ (p est donné aussi). C'est le nombre tel que $b = \sqrt[p]{m^p - a^p}$ pour $p \neq 0$ et $b = m^2/a$ pour $p = 0$. On voit au a et m doivent vérifier certaines conditions pour que b existe.

L'établissement des agrandissements permet d'énoncer l'équivalence suivante.

$\forall (a,b,c,d) \in (\mathbb{R}^+ \setminus \{0\})^4,\ \forall p \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} a : b ::^p c : d &\Leftrightarrow a : m_p(a,b) ::^p c : m_p(c,d) \\ &\Leftrightarrow m_p(a,c) : c ::^p m_p(b,d) : d \\ &\Leftrightarrow a : m_p(a,b) ::^p m_p(a,c) : m_p(a,b,c,d) \end{aligned}$$

Chapitre 3

Bornes de la puissance analogique

3.1 Relation entre les plus grands antécédent et conséquent

Pour une analogie en puissance p, avec p positif, les plus grands antécédent et conséquent entretiennent une relation d'ordre impliquant l'inverse de la puissance p.

Théorème 1 (Relation entre antécédent et conséquent)
$\forall (a, b, c, d) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^4,\ \forall p \in \mathbb{R}_+,\ a \leq b \leq c \leq d,$

$$a : b ::^p c : d \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} d \ \leq \ 2^{1/p} \times c \\ c \ \leq \ 2^{1/p} \times d \end{cases}$$

Soulignons le fait que, ci-dessus, p est positif.

Démonstration : Elle se fait en deux temps. Dans un premier temps, on exploite un encadrement de la moyenne généralisée en p pour p positif. Dans un deuxième temps, on applique la définition de l'analogie en puissance p qui énonce l'égalité des moyennes généralisées en p.

Premier temps : on considère deux nombres positifs non-nuls tels que $0 < a < d$ et un p positif.

$$\begin{aligned}
d^p \leq a^p + d^p \leq 2d^p &\Leftrightarrow d^p \leq 2 \times \frac{1}{2}\left(a^p + d^p\right) \leq 2d^p \\
&\Leftrightarrow (d^p)^{1/p} \leq 2^{1/p} \times \left(\frac{1}{2}\left(a^p + d^p\right)\right)^{1/p} \leq 2^{1/p}(d^p)^{1/p} \\
&\Leftrightarrow d \leq 2^{1/p} \times \left(\frac{1}{2}\left(a^p + d^p\right)\right)^{1/p} \leq 2^{1/p} d \\
&\Leftrightarrow m_{+\infty}(a,d) \leq 2^{1/p} m_p(a,d) \leq 2^{1/p} m_{+\infty}(a,d) \\
&\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{1/p} m_{+\infty}(a,d) \leq m_p(a,d) \leq m_{+\infty}(a,d)
\end{aligned}$$

La première séquence d'inégalités est vraie parce que p est positif, a est positif et d est plus grand que a. L'élévation à la puissance $1/p$ ne change pas l'ordre des inégalités car p est positif. [1]

On applique ce même résultat à b et c en posant $0 < b < c$.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{1/p} m_{+\infty}(b,c) \leq m_p(b,c) \leq m_{+\infty}(b,c)$$

La prise des opposés inverse le sens des inégalités.

$$-m_{+\infty}(b,c) \leq -m_p(b,c) \leq -\left(\frac{1}{2}\right)^{1/p} m_{+\infty}(b,c)$$

On en dérive : $\forall (a,b,c,d) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^4,\ 0 < a \leq b \leq c \leq d,\ \forall p \in \mathbb{R}_+,$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{2}\right)^{1/p} m_{+\infty}(a,d) - {} & m_{+\infty}(b,c) \\
&\leq m_p(a,d) - m_p(b,c) \\
&\qquad \leq m_{+\infty}(a,d) - \left(\frac{1}{2}\right)^{1/p} m_{+\infty}(b,c)
\end{aligned}$$

1. Il existe un résultat semblable bien connu pour la norme L_p :

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n,\ \forall p \in \mathbb{R}_+,\ \ \|\vec{x}\|_{+\infty} \leq \|\vec{x}\|_p \leq n^{1/p}\,\|\vec{x}\|_{+\infty}.$$

Deuxième temps : on applique les inégalités précédentes au cas de l'analogie en puissance p qui énonce l'égalité des moyennes généralisées en p.

$\forall (a,b,c,d) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^4,\ 0 < a \leq b \leq c \leq d,\ \forall p \in \mathbb{R}_+,$

$$\begin{array}{rcl} a : b ::^p c : d & \Leftrightarrow & \left(\frac{1}{2}\right)^{1/p} d - c \leq m_p(a,d) - m_p(b,c) \leq d - \left(\frac{1}{2}\right)^{1/p} c \\ & \Leftrightarrow & \left(\frac{1}{2}\right)^{1/p} d - c \leq 0 \leq d - \left(\frac{1}{2}\right)^{1/p} c \\ & \Leftrightarrow & d - 2^{1/p} c \leq 0 \leq 2^{1/p} d - c \\ & \Leftrightarrow & \begin{cases} d \leq 2^{1/p}\, c \\ c \leq 2^{1/p}\, d \end{cases} \end{array}$$

C'est le résultat voulu.

□

Vérification : le résultat obtenu peut paraître étonnant. Mais il est bien vrai que l'on a $1 \leq 4^{1/p}$ pour tout $p \in \mathbb{R}_+$, inégalité obtenue en majorant c par $2^{1/p} d$ dans la première ligne de la conjonction d'inégalités ci-dessus. En effet, $4^{1/p}$

— tend vers $+\infty$ quand p tend vers 0 et

— tend vers 1 par valeurs supérieures quand p tend vers $+\infty$.

3.2 Relation entre les plus petits antécédent et conséquent

On procède de la même manière que précédemment mais on travaille sur les inverses. Si $0 < a < b < c < d$ alors $0 < \frac{1}{d} < \frac{1}{c} < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$. La puissance p est toujours supposée positive.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{a}\right)^p \leq \left(\frac{1}{a}\right)^p + \left(\frac{1}{d}\right)^p \leq 2\left(\frac{1}{a}\right)^p \\
\Leftrightarrow \quad & \left(\frac{1}{a}\right)^p \leq 2 \times \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{a}\right)^p + \left(\frac{1}{d}\right)^p\right) \leq 2\left(\frac{1}{a}\right)^p \\
\Leftrightarrow \quad & a^{-p} \leq 2 \times \frac{1}{2}\left(a^{-p} + d^{-p}\right) \leq 2a^{-p} \\
\Leftrightarrow \quad & 2^{-1/p}\left(a^{-p}\right)^{-1/p} \leq 2^{-1/p} \times \left(\frac{1}{2}\left(a^{-p} + d^{-p}\right)\right)^{-1/p} \leq \left(a^{-p}\right)^{-1/p} \\
\Leftrightarrow \quad & \left(\frac{1}{2}\right)^{1/p} a \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{1/p} \times \left(\frac{1}{2}\left(a^{-p} + d^{-p}\right)\right)^{-1/p} \leq a \\
\Leftrightarrow \quad & \left(\frac{1}{2}\right)^{1/p} m_{-\infty}(a,d) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{1/p} m_{-p}(a,d) \leq m_{-\infty}(a,d) \\
\Leftrightarrow \quad & m_{-\infty}(a,d) \leq m_{-p}(a,d) \leq 2^{1/p} m_{-\infty}(a,d)
\end{aligned}$$

La première inégalité est vraie selon les mêmes arguments que précédemment. L'élévation à la puissance $1/(-p) = -1/p$ inverse l'ordre des inégalités car p étant positif, $-1/p$ est négatif. Maintenant, a est bien le minimum de a et d, c'est-à-dire la moyenne de ces deux nombres en moins l'infini. Observez que le résultat final fait intervenir la moyenne généralisée en $-p$, avec p positif.

Pour p négatif, on aura donc :

$$m_{-\infty}(a,d) \leq m_p(a,d) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{1/p} m_{-\infty}(a,d)$$

Les mêmes manipulations que dans le cas plus haut avec $m_{+\infty}$ conduisent au résultat suivant, pour p négatif, attention, pas positif, en faisant attention que le facteur $2^{1/p}$ est placé différemment ici.

$\forall (a,b,c,d) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^4,\ 0 < a \leq b \leq c \leq d,\ \forall p \in \mathbb{R}_-,$

$$\begin{array}{rlclcl}
a : b ::^p c : d & \Leftrightarrow a - \left(\frac{1}{2}\right)^{1/p} b & \leq & m_p(a,d) - m_p(b,c) & \leq & \left(\frac{1}{2}\right)^{1/p} a - b \\
& \Leftrightarrow a - \left(\frac{1}{2}\right)^{1/p} b & \leq & 0 & \leq & \left(\frac{1}{2}\right)^{1/p} a - b \\
& \Leftrightarrow 2^{1/p}\, a - b & \leq & 0 & \leq & a - 2^{1/p}\, b \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq 2^{1/p}\, b \\ b \leq 2^{1/p}\, a \end{cases} & & & &
\end{array}$$

On peut donc conclure pour le cas où p est négatif.

Théorème 2 (Relation entre antécédent et conséquent)
$\forall (a,b,c,d) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^4,\ \forall p \in \mathbb{R}_-,\ a \leq b \leq c \leq d,$

$$a : b ::^p c : d \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a \leq 2^{1/p} \times b \\ b \leq 2^{1/p} \times a \end{cases}$$

3.3 Bornes pour la puissance analogique

Les résultats précédents permettent de donner des bornes de la puissance d'une analogie donnée. Tout d'abord, indépendamment de l'analogie, on a :

$$\begin{aligned} c < d \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{c}{d} < 1 < \frac{d}{c} \\ &\Leftrightarrow \quad \log_2 \frac{c}{d} < 0 < \log_2 \frac{d}{c} \end{aligned}$$

Maintenant, pour quatre nombres a, b, c et d, réels positifs, non-nuls, différents deux à deux et triés par ordre croissant, on sait que l'on a une analogie en p, $a : b ::^p c : d$.

Si p est positif, le théorème 1 permet d'écrire :

$$\begin{aligned} d \leq 2^{1/p} c \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{d}{c} \leq 2^{1/p} \\ &\Leftrightarrow \quad \log_2 \frac{d}{c} \leq 1/p \\ &\Leftrightarrow \quad p \leq \frac{1}{\log_2 d/c} \end{aligned}$$

Pour déterminer en pratique la puissance p de l'analogie entre quatre nombres a, b, c et d, on pourra donc partir de $p = 1/(\log_2 d/c)$ comme borne supérieure.

Le théorème 2 permet d'écrire, en faisant attention que p est négatif :

$$\begin{aligned} a \leq 2^{1/p} b \quad &\Leftrightarrow \quad 2^{1/p} \leq \frac{a}{b} \\ &\Leftrightarrow \quad 1/p \leq \log_2 \frac{a}{b} \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\log_2 a/b} \leq p \end{aligned}$$

Noter que comme $a < b$, $\log_2 a/b$ est négatif car a/b est inférieur à 1. Pour déterminer en pratique la puissance p de l'analogie entre quatre nombres a, b, c et d, on pourra donc partir de $p = 1/(\log_2 a/b)$ comme borne inférieure.

En combinant les deux bornes données ci-dessus, on peut écrire :

Théorème 3 (Bornes de la puissance analogique)
$\forall(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4,\ 0 < a < b < c < d,\ \forall p \in \mathbb{R},$

$$a : b ::^p c : d \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\log_2 a/b} \leq p \leq \frac{1}{\log_2 d/c}$$

On pourra utiliser de telles bornes dans un algorithme de détermination de la puissance analogie. Les cas particuliers où certains des termes sont égaux, et qui mènent à des puissances infinies ou couvrant tout $\mathbb{R}$, n'ont pas besoin de ces bornes pour être traitées.

Chapitre 4

Analogie à termes nuls

4.1 Cas où l'un des terme est égal à zéro

Comme on suppose tous les termes positifs, le plus petit terme, a, est égal à 0. On a donc $a = 0 < b < c < d$.

La moyenne de a et d avec p négatif n'existe pas. En effet, zéro élevé à une puissance négative n'est pas défini. La borne inférieure pour p est donc 0. En $p = 0$, la valeur de la moyenne de a et d est 0. La démonstration est donnée ci-dessous.

$$\begin{aligned} m_0(a,d) = m_0(0,d) &= \lim_{r\to 0}\left(\frac{1}{2}(0^r + d^r)\right)^{1/r} \\ &= \lim_{r\to 0}\left(\frac{1}{2}(d^r)\right)^{1/r} \\ &= \lim_{r\to 0}\left(\frac{1}{2}\right)^{1/r}(d^r)^{1/r} \\ &= \lim_{r\to 0}\left(\frac{1}{2}\right)^{1/r}\times d \\ &= \lim_{r'\to +\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{r'}\times d \\ &= 0\times d \\ &= 0 \end{aligned}$$

On a donc : $0 \leq m_p(a,d) \leq d$.

On considère la puissance analogique p de $0 : b :: c : d$. D'après le résultat précédent, sa borne inférieure est 0, mais on peut encadrer de façon plus précise.

L'intersection des deux courbes des moyennes des extrêmes et moyennes des des moyens est nécessairement au dessus de b.

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2}\right)^{1/p} \times d \geq b \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{d}{b} \geq 2^{1/p} \\ &\Leftrightarrow \quad \log_2 \frac{d}{b} \geq 1/p \\ &\Leftrightarrow \quad p \geq \frac{1}{\log_2 d/b}\end{aligned}$$

Ceci établit une borne inférieure pour le cas où le plus petit terme est égal à zéro.

Pour la borne supérieure, le calcul de la borne vue au théorème 3 ne fait pas intervenir a. On peut donc l'adopter.

$$p \leq \frac{1}{\log_2 d/c}$$

En résumé, on ale théorème suivant, à rapprocher du cas général où a est différent de 0 vu au théorème 3. Seule la borne inférieure change.

Théorème 4 (Bornes de la puissance analogique quand $a = 0$)
$\forall(b, c, d) \in \mathbb{R}^3,\ 0 < b < c < d,\ \forall p \in \mathbb{R},$

$$0 : b ::^p c : d \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\log_2 d/b} \leq p \leq \frac{1}{\log_2 d/c}$$

4.2 Cas où deux des termes sont égaux à zéro

Dans ce cas, $a = b = 0 < c < d$. On suppose que c et d sont non-nuls et différents. Comme on l'a vu au paragraphe précédent, $m_0(0, d) = 0$. On a donc aussi $m_0(0, c) = 0$. L'égalité de ces deux moyennes implique l'écriture $0 : 0 ::^0 c : d$. Aucune autre valeur supérieure de p ne permettant l'égalité, $p = 0$ est l'unique puissance analogique.

4.3 Cas où trois des termes sont égaux à zéro

Dans ce cas, $a = b = c = 0 < d$. On suppose que seul d est différent de zéro.

De même qu'au paragraphe précédent, $m_0(0, d) = 0$. Pour tout p strictement supérieur à 0, $m_0(0, d) > 0$

Maintenant, $m_p(b, c) = m_p(0, 0) = 0$ pour toute valeur de p positif, y compris 0. Pour des p négatif, la moyenne n'est pas définie.

Les deux remarques précédentes implique que l'égalité de deux moyennes n'a lieu que pour p égal à 0. L'écriture $0 : 0 ::^p 0 : d$ n'est donc possible que pour $p = 0$. De nouveau on a unicité de la puissance analogique.

4.4 Cas où les quatre des termes sont égaux à zéro

La moyenne $m_p(0, 0)$ est définie seulement pour p positif, y compris zéro. L'analogie $0 : 0 ::^p c : d$ est donc possible pour tout p dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

4.5 Résumé des cas d'analogies avec au moins un terme nul

Analogie	Puissance
$0 : b ::^p c : d$	$\exists! p \quad \wedge \quad \dfrac{1}{\log_2 d/b} \leq p \leq \dfrac{1}{\log_2 d/c}$
$0 : 0 ::^p c : d$	$p = 0$
$0 : 0 ::^p 0 : d$	$p = 0$
$0 : 0 ::^p 0 : 0$	$\forall p \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$

Chapitre 5

Discussion

Les propriétés de rétrécissement et d'agrandissement sont intéressantes car elles établissent des invariances sur les analogies en puissance p. Celles sur les bornes permettent évidemment de restreindre en pratique la plage dans laquelle chercher la puissance analogique de quatre termes donnés.

Nous proposons ci-dessous quelques pistes de recherche possibles.

5.1 Moyenne généralisée et barycentre

Nous avons vu que dans le cas de deux réels positifs non-nuls a et d, les moyennes généralisées prenaient leurs valeurs entre a et d. Géométriquement, toute moyenne généralisée est donc une point du segment $]a, d[$. Il se caractérise donc par un $\lambda \in]0; 1[$ tel que

$$m_p(a, d) = \lambda a + (1 - \lambda) d$$

La fonction qui à p associe λ est une fonction caractéristique de a et d. Il serait intéressant de l'étudier. Et l'on peut aussi s'intéresser à la fonction inverse qui à λ associe p.

5.2 Approximation de la fonction moyenne généralisée par la fonction sigmoïde

La fonction sigmoïde est définie par $\sigma(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$. Le profil de la courbe des moyennes généralisées de deux nombres est similaire à celle de la fonction sigmoïde, aux réserves près que nous avons pu par exemple exprimer sur l'absence de symétrie centrale.

Il est évidemment possible, en introduisant des paramètres, de translater, de recadrer er de ré-incliner la fonction sigmoïde afin de la faire s'approcher la fonction moyenne généralisée de la meilleure façon. On peut donc s'interroger sur les paramètres à introduire qui permettent de minimiser l'écart entre ces deux fonctions.

Ceci fait, et étant données deux approximations de la fonction moyenne généralisée pour deux couples a, d et b, c, on pourra alors se demander si l'on peut calculer rapidement la puissance en p pour leur analogie $a : b ::^p c : d$ avec un écart le plus petit possible..

5.3 Suites d'entiers

On se fixe une puissance p au hasard. On se donne trois nombres entiers a, b et c au hasard. On calcule le d. On réitère alors, soit sur b, c, d par glissement de 1, soit sur c, d et e par glissement de 2. Dans ce dernier cas, comment calcule-t-on le e ? Le critère d'arrêt est que d n'est pas entier. Quelles suites d'entiers obtient-on ?

On se donne quatre nombres entiers a, b, c et d au hasard. On calcule le motif de l'analogie et la puissance en p pour laquelle il y a analogie. On applique alors le même ordre et la même puissance pour résoudre l'analogie avec b, c et d. et on réitère. Quelles suites d'entiers obtient-on ?